数理解析研究所講究録
第1621巻 2009年 161-170

LINEX 損失関数の下での多変量正規分布における線型推定量の許容性と非許容性について

大阪府立大・工学研究科 達川 真史 (Masashi Tatsukawa)
Graduate School of Engineering,
Osaka Prefecture University

大阪府立大・工学研究科 田中 秀和 (Hidekazu Tanaka)
Graduate School of Engineering,
Osaka Prefecture University

1 はじめに

統計的推測理論において適当な損失関数の下でリスクを評価し, 提起された推定量が許容的であるかまたは非許容的であるかを決定する問題は重要である. 損失関数としては解析的にも扱いやすい, 不偏推定量に対してはリスクが分散と一致するといった理由等から通常, 2 乗誤差損失を用いることが多い. Cohen [2] は多変量正規分布の母平均の線型結合の推定問題を 2 乗誤差損失の下で考え, 線型推定量が許容的となるための必要十分条件を与えた. しかし, 2 乗誤差損失とは異なる損失関数の場合には解析的にも取り扱い難い面もあり, あまり論じられてこなかったようである. Varian [8] は, 現実問題として, 過大評価によって被る損失と過小評価によって被る損失が必ずしも対称ではないことから, 非対称な損失関数である LINEX 損失関数を提案した (Zellner [9]). これは, 被推定関数 $g(\theta)$ の推定量 δ に対して,

$$L(\theta,\delta)=b[\exp\{a(\delta-g(\theta))\}-a(\delta-g(\theta))-1] \tag{1.1}$$

と定義される. ただし, $a\neq 0$, $b>0$ である. LINEX 損失の下での推定量の許容性に関する研究としては, 例えば, Rojo [4] は 1 変量正規分布の母平均の推定において, 線型推定量が許容的となるための必要十分条件について論じている.

最近, Tanaka and Tatsukawa [7] はこれらの結果の拡張を与えた. 本論の目的は, これら一連の結果の概説を与えることである.

2 準備

本章では本論において必要となる定義, 定理及び補題を挙げておく.

確率ベクトル X は確率密度関数 $f(x,\theta)$ $(x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^p)$ をもつ分布に従うとする. ただし, θ は未知で, $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$ とする. X に基づく $g(\theta)$ の推定量を $\delta(X)$ とし, 損失関数を $L(\theta,\delta)$ とする. このとき, リスク関数 $R(\theta,\delta)$ は $R(\theta,\delta) := E_\theta[L(\theta,\delta)]$ と定義される.

定義 $R(\theta,\delta)$ を δ のリスク関数とする.

(I) 次の 2 つの条件

(i) $R(\theta,\delta_1) \le R(\theta,\delta_2)$ $(\forall\theta \in \Theta)$

(ii) $R(\theta,\delta_1) < R(\theta,\delta_2)$ $(\exists\theta_0 \in \Theta)$

が成立するとき, δ_1 は δ_2 を優越しているという.

(II) ある推定量 δ に対して, それを優越している推定量 δ^* が存在するとき, δ は非許容的であるという.

(III) δ が非許容的でないとき, δ は許容的であるいう.

補題 1 一意の Bayes 推定量は許容的である.

証明 δ を事前分布 π に関する一意の Bayes 推定量とする. ここで, 推定量 δ' が δ を優越しているとすれば,

$$\int_\Theta R(\theta,\delta')\pi(\theta)d\theta \le \int_\Theta R(\theta,\delta)\pi(\theta)d\theta$$

が成立する. これは δ が一意の Bayes 推定量あることに矛盾する. ■

補題 2 p 次元ベクトル $\boldsymbol{a}_p$ と $\boldsymbol{b}_p$ が $\boldsymbol{a}_p'\boldsymbol{b}_p > 0$ を満たすとき, $K\boldsymbol{a}_p$ と $K\boldsymbol{b}_p$ の成分がすべて正となるような直交行列 K が存在する.

証明 p に関する数学的帰納法による. ■

これらの補題を用いることにより, 線型推定量の許容性に関して, 次の結果が得られている.

定理 1 (Cohen [2])[1] X を p 変量正規分布 $N_p(\theta,\Sigma)$ に従う確率ベクトルとする. $\varphi'\theta$ の推定量 $\gamma'X+k$ $(\gamma\in\mathbb{R}^p, k\in\mathbb{R})$ が2乗誤差損失の下で許容的であるための必要十分条件は, 次のいずれかの条件を満たすことである.

$$\text{(i)}\ \left(\gamma-\frac{\varphi}{2}\right)'\Sigma\left(\gamma-\frac{\varphi}{2}\right)\le\frac{1}{4}\varphi'\Sigma\varphi\quad \text{かつ}\quad \gamma\neq\varphi.$$

$$\text{(ii)}\ \gamma=\varphi\quad \text{かつ}\quad k=0.$$

定理 2 (Rojo [4]) X を1変量正規分布 $N(\theta,1)$ に従う確率変数とする. θ の推定量 $\gamma X+k$ $(\gamma\in\mathbb{R}, k\in\mathbb{R})$ がLINEX損失の下で許容的であるための必要十分条件は, 次のいずれかの条件を満たすことである.

$$\text{(i)}\ \gamma\in[0,1).$$

$$\text{(ii)}\ \gamma=1\quad \text{かつ}\quad k=-\frac{a}{2}.$$

次に, 2乗誤差とLINEX損失関数の関係について述べる.

補題 3 $L(\theta,\delta)$ を (1.1) で定義されたLINEX損失関数とする. このとき

$$\frac{2}{a^2b}L(\theta,\delta)\to(\delta-g(\theta))^2\qquad(a\to 0)$$

が成り立つ.

<u>証明</u> 容易であるので省略する. ■

LINEX損失関数 (1.1) は $a=0$ では定義されていないが, 補題3により係数を適当に修正することにより, $a=0$ では2乗誤差と見なすことができる. そこで, 本論では, Cohen [2] 及び Rojo [4] の結果を一般化して, 以下のような問題について考察する.

X を p 変量正規分布 $N_p(\theta,\Sigma)$ に従う確率ベクトルとする. ここで, 平均ベクトル $\theta(\in\mathbb{R}^p)$ は未知であり, Σ は既知であるとする. このとき, 与えられた既知ベクトル $\varphi(\in\mathbb{R}^p\setminus\{0\})$ に対して, θ の関数 $g(\theta)=\varphi'\theta$ の推定問題を LINEX 損失関数 (1,1) の下で考え, 線型推定量

$$\delta(\gamma,k):=\gamma'X+k$$

が許容的となるための $\gamma(\in\mathbb{R}^k)$ 及び $k(\in\mathbb{R})$ に関する必要十分条件について考える.

ここで, これらを議論する上で用いる補題について述べる.

[1] Cohen [2] の Theorem 2.2 の証明では不備があるが, 本論での補題2を用いて証明することが出来る.

補題 4 (Karlin [3])[2] $S(\theta)$ を $\Theta = (\underline{\theta}, \bar{\theta})$ 上で定義された区分的に連続な非負値関数とし，適当な正値関数 $K(\theta)$ が存在して，全ての $u, v \in \Theta$ に対して

$$\int_u^v S(\theta)d\theta \leq \sqrt{S(v)}\sqrt{K(v)} + \sqrt{S(u)}\sqrt{K(u)}$$

が成り立つものとする．このとき，適当な $d \in \Theta$ が存在して

$$\lim_{c \to \bar{\theta}} \int_d^c \frac{d\theta}{K(\theta)} = \lim_{c \to \underline{\theta}} \int_c^d \frac{d\theta}{K(\theta)} = \infty$$

が成り立てば，$a.a.\theta \in \Theta$ に対して $S(\theta) = 0$ となる．

補題 4 及び Tanaka [6] と同様の手法を用いて，次の補題を示すことができる．

補題 5 $Y = (Y_1, \ldots, Y_p)'$ は平均ベクトルが $(\xi, \mathbf{0})'$，共分散行列が単位行列 I の p 変量正規分布 $N_p((\xi, \mathbf{0})', I)$ に従う確率ベクトルとする．このとき，任意の $\xi \in \mathbb{R}$ に対して，

$$R(\xi, \delta(Y)) \leq R\left(\xi, Y_1 - \frac{a}{2}\right)$$

が成立すれば，$a.a.y \in \mathbb{R}^p$ に対して $\delta(y) = y_1 - a/2$ が成り立つ．

3 線型推定量の許容性と非許容性について

本章では，第 3.1 節で，X を p 変量正規分布 $N_p(\theta, I)$ に従う確率ベクトルとしたときに，$g(\theta) = \varphi'\theta$ の推定量 $\delta(\gamma, k)$ の許容性と非許容性を LINEX 損失関数 (1.1) の下で考える．なお，推定量の許容性，非許容性を論じる際には，(1.1) において $b = 1$ としても一般性を失わないので，以降 $b = 1$ として議論する．

3.1 共分散行列が単位行列のとき

まず，推定量 $\delta(\gamma, k)$ のリスク関数は，正規分布の積率母関数を用いることにより

$$R(\theta, \delta(\gamma, k)) = \exp\left[\frac{a^2}{2}\gamma'\gamma + a\left\{(\gamma - \varphi)'\theta + k\right\}\right] - a\left\{(\gamma - \varphi)'\theta + k\right\} - 1 \tag{3.1}$$

となる．

定理 3 $\gamma'\gamma > \gamma'\varphi$ ならば $\delta(\gamma, k)$ は非許容的である．

[2]証明については Karlin [3] の他に，Tanaka [5] で詳しくなされている．

<u>証明</u>　(i) $\gamma'\gamma > \varphi'\varphi$ となる γ に対して考える．$\delta(\varphi, -a\varphi'\varphi/2)$ のリスク関数は (3.1) より，

$$R\left(\theta, \delta\left(\varphi, -\frac{a}{2}\varphi'\varphi\right)\right) = \frac{a^2}{2}\varphi'\varphi$$

となる．任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して，不等式 $e^x > 1 + x$ が成立するので，

$$R(\theta, \delta(\gamma, k)) - R\left(\theta, \delta\left(\varphi, -\frac{a}{2}\varphi'\varphi\right)\right) \geq \frac{a^2}{2}(\gamma'\gamma - \varphi'\varphi) > 0$$

を得る．

(ii) $\gamma'\varphi < \gamma'\gamma \leq \varphi'\varphi$ となる γ に対して考える．

$$c := \frac{\varphi'\varphi - \gamma'\varphi}{(\gamma-\varphi)'(\gamma-\varphi)},\ \tilde{\gamma} := c(\gamma - \varphi) + \varphi,\ \tilde{k} := ck - \frac{a}{2}(1-c)\tilde{\gamma}'\tilde{\gamma}$$

とおけば，

$$0 < c < 1,\quad \tilde{\gamma}'\tilde{\gamma} < \gamma'\gamma,\quad k - \tilde{k} = (1-c)\left(k + \frac{a}{2}\tilde{\gamma}'\tilde{\gamma}\right) \tag{3.2}$$

が成立する (γ, φ, $\tilde{\gamma}$ の関係については図 1 を参照)．このとき，$\delta(\tilde{\gamma}, \tilde{k}) = \tilde{\gamma}'X + \tilde{k}$ のリスク関数は，

$$R(\theta, \delta(\tilde{\gamma}, \tilde{k})) = \exp\left[\frac{a^2}{2}\tilde{\gamma}'\tilde{\gamma} + a\left\{c(\gamma-\varphi)'\theta + \tilde{k}\right\}\right] - a\left\{c(\gamma-\varphi)'\theta + \tilde{k}\right\} - 1$$

となる．ここで，任意の x, y, $z \in \mathbb{R}$ に対して，不等式

$$e^x - e^y \geq e^y(x-y),\quad (e^z - 1)z \geq 0$$

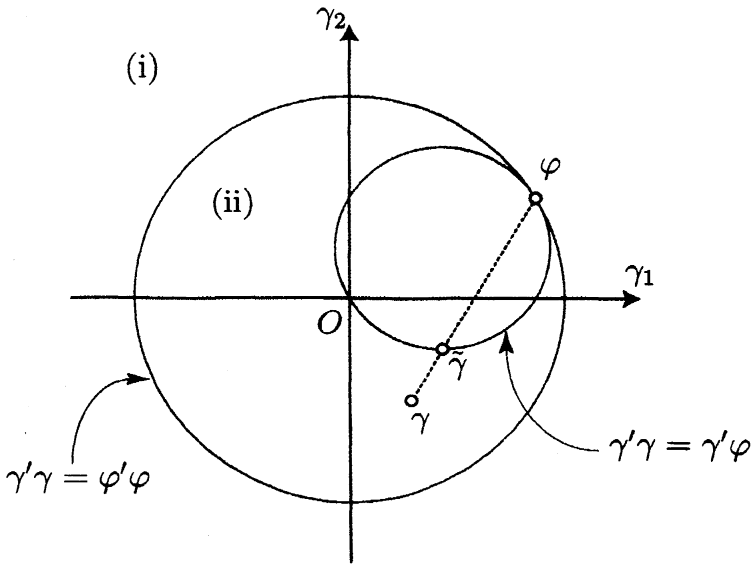

図 1. $p = 2$ **のときの (i), (ii) の領域と** γ, φ, $\tilde{\gamma}$ **の関係**

が成立することと, (3.2) を考慮すれば,

$$
\begin{aligned}
&R(\theta,\delta(\gamma,k))-R(\theta,\delta(\tilde{\gamma},\tilde{k}))\\
&\quad\geq \exp\left[\frac{a^2}{2}\tilde{\gamma}'\tilde{\gamma}+a\left\{c(\gamma-\varphi)'\theta+\tilde{k}\right\}\right]\\
&\qquad\times\left[\frac{a^2}{2}(\gamma'\gamma-\tilde{\gamma}'\tilde{\gamma})+a\left\{(1-c)(\gamma-\varphi)'\theta+(k-\tilde{k})\right\}\right]\\
&\qquad -a\left\{(1-c)(\gamma-\varphi)'\theta+(k-\tilde{k})\right\}\\
&\quad> \left[\exp\left[ac\left\{\frac{a}{2}\tilde{\gamma}'\tilde{\gamma}+k+(\gamma-\varphi)'\theta\right\}\right]-1\right]a(1-c)\left\{\frac{a}{2}\tilde{\gamma}'\tilde{\gamma}+k+(\gamma-\varphi)'\theta\right\}\\
&\quad>0
\end{aligned}
$$

を得る. つまり, $\delta(\tilde{\gamma},\tilde{k})$ は $\delta(\gamma,k)$ を優越していることから, $\delta(\gamma,k)$ は非許容的であることが分かる. ■

次に, $\delta(\gamma,k)$ の許容性について考える.

定理 4 $\gamma=0$ ならば, 任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して $\delta(\gamma,k)$ は許容的である.

<u>証明</u> $\delta(0,k)$ のリスク関数は $\varphi'\theta=k$ となる θ において 0 となる. よって, $\delta(0,k)$ は許容的である. ■

定理 5 $\gamma'\varphi>\gamma'\gamma$ ならば, $\delta(\gamma,k)$ は許容的である.

<u>証明</u> 補題2から, $K\gamma$ と $K(\varphi-\gamma)$ のすべての成分が正となるような直交行列 K が存在する. ここで,

$$(x_1,\ldots,x_p)':=K\gamma,\ \ (y_1,\ldots,y_p)':=K(\varphi-\gamma),\ \ \Lambda:=K'\mathrm{diag}\left(\frac{x_1}{y_1},\ldots,\frac{x_p}{y_p}\right)K$$

とおけば,

$$\gamma=\Lambda(\varphi-\gamma) \tag{3.3}$$

が成立する. また, 任意の $k\in\mathbb{R}$ に対して,

$$k=\varphi'(\Lambda+I)^{-1}\mu-\frac{a}{2}\gamma'\varphi$$

を満足する $\mu\in\mathbb{R}^p$ が存在する. これらの Λ,μ を用いて θ の事前分布として, $N_p(\mu,\Lambda)$ を考える. このとき, $X=x$ を与えたときの θ の条件付き確率密度関数は,

$$
\begin{aligned}
f(\theta|x)=\frac{1}{(2\pi)^{p/2}\sqrt{|\Lambda_{11,2}|}}\exp\Bigl[-\frac{1}{2}\{(\theta-\mu)\\
-\Lambda_{11,2}(x-\mu)\}'\Lambda_{11,2}^{-1}\{(\theta-\mu)-\Lambda_{11,2}(x-\mu)\}\Bigr]
\end{aligned}
$$

となる. ただし, $\Lambda_{11,2} := \Lambda(\Lambda+I)^{-1}$ である (Anderson [1]). ここで, ある事前分布が与えられたときの $g(\theta)$ の Bayes 推定量は, $\delta_B(X) = -\log E(e^{-ag(\theta)}|X)/a$ で与えられるので (Zellner [9]), 事前分布 $N_p(\mu,\Lambda)$ に関する $g(\theta) = \varphi'\theta$ の Bayes 推定量は,

$$\delta_B(X) = \varphi'\Lambda_{11,2}X + \varphi'(\Lambda+I)^{-1}\mu - \frac{a}{2}\gamma'\varphi$$

となる. (3.3) から $\gamma = \Lambda'_{11,2}\varphi$ が成り立つので, $\delta(\gamma,k)$ はある p 変量正規分布に関する一意の Bayes 推定量となり, 補題1より許容的であることが分かる. ■

次に, $\gamma'(\gamma-\varphi) = 0$, $\gamma \neq 0$, $\gamma-\varphi \neq 0$ のときの $\delta(\gamma,k)$ の許容性について考える.

定理 6 $\gamma'(\gamma-\varphi) = 0$, $\gamma \neq 0$, $\gamma-\varphi \neq 0$ ならば, $\delta(\gamma,k)$ は許容的である.

証明 $\delta(\gamma,k)$ が非許容的であると仮定すると, $\delta(\gamma,k)$ を優越するような推定量 $h(X)$ が存在する. つまり, 任意の $\theta \in \mathbb{R}^p$ に対して

$$R(\theta,h(X)) \leq R(\theta,\delta(\gamma,k)) \tag{3.4}$$

が成立する. いま, $\gamma'(\gamma-\varphi) = 0$ であるから, 第1行と第2行がそれぞれ $\gamma'/(\gamma'\gamma)^{1/2}$ と $(\gamma-\varphi)'/\ \{(\gamma-\varphi)'(\gamma-\varphi)\}^{1/2}$ で与えられるような直交行列 Γ が存在する. $Z := \Gamma X$, $\omega := \Gamma\theta$ とおくと, Z は正規分布 $N_p(\omega,I)$ に従う. このとき, (3.4) から任意の $\omega \in \mathbb{R}^p$ に対して,

$$\begin{aligned}
&E_\omega\Big[\exp\big\{a(h(\Gamma'Z) - (\gamma'\gamma)^{1/2}\omega_1 + \{(\gamma-\varphi)'(\gamma-\varphi)\}^{1/2}\omega_2)\big\} \\
&\qquad -a(h(\Gamma'Z) - (\gamma'\gamma)^{1/2}\omega_1 + \{(\gamma-\varphi)'(\gamma-\varphi)\}^{1/2}\omega_2) - 1\Big] \\
&\leq E_\omega\Big[\exp\big\{a((\gamma'\gamma)^{1/2}Z_1 + k - (\gamma'\gamma)^{1/2}\omega_1 + \{(\gamma-\varphi)'(\gamma-\varphi)\}^{1/2}\omega_2)\big\} \\
&\qquad -a((\gamma'\gamma)^{1/2}Z_1 + k - (\gamma'\gamma)^{1/2}\omega_1 + \{(\gamma-\varphi)'(\gamma-\varphi)\}^{1/2}\omega_2) - 1\Big]
\end{aligned}$$

が成立する. ただし, $\hat{h}(Z) := (h(\Gamma'Z) - k + a\gamma'\gamma/2)/(\gamma'\gamma)^{1/2}$ である. 特に, 超平面

$$\left\{\omega \in \mathbb{R}^p \,\middle|\, \omega_2 = -\frac{k + a\gamma'\gamma/2}{\{(\gamma-\varphi)'(\gamma-\varphi)\}^{1/2}},\ \omega_j = 0 \quad (j = 3,\ldots,p)\right\}$$

の上で考えると,

$$\begin{aligned}
&E_{\omega_1}\left[\exp\left\{a(\gamma'\gamma)^{1/2}(\hat{h}(Z) - \omega_1)\right\} - a(\gamma'\gamma)^{1/2}(\hat{h}(Z) - \omega_1) - 1\right] \\
&\leq E_{\omega_1}\left[\exp\left\{a(\gamma'\gamma)^{1/2}\left(Z_1 - \frac{a}{2}(\gamma'\gamma)^{1/2} - \omega_1\right)\right\}\right. \\
&\qquad \left. -a(\gamma'\gamma)^{1/2}\left(Z_1 - \frac{a}{2}(\gamma'\gamma)^{1/2} - \omega_1\right) - 1\right]
\end{aligned}$$

を満足することが分かる．これは，

$$L(\theta,\delta) = \exp\left\{a(\gamma'\gamma)^{1/2}(\delta - g(\theta))\right\} - a(\gamma'\gamma)^{1/2}(\delta - g(\theta)) - 1$$

の形の LINEX 損失の下でのリスク関数を用いて，

$$R(\omega_1, \hat{h}(Z)) \leq R\left(\omega_1, Z_1 - \frac{a}{2}(\gamma'\gamma)^{1/2}\right)$$

と表すことができる．よって，補題 5 より $a.a.z \in \mathbb{R}^p$ に対して $\hat{h}(z) = z - a(\gamma'\gamma)^{1/2}/2$ が得られ，結果的に $a.a.x \in \mathbb{R}^p$ に対して $h(x) = \gamma'x + k$ となることが分かる． ■

注意 1 $\gamma'(\gamma - \varphi) = 0,\ \gamma \neq 0,\ \gamma - \varphi \neq 0$ のとき，補題 2 により，$L\gamma$ と $L\varphi$ のすべての成分が正となるような直交行列 L が存在する．ここで，

$$(z_1, \ldots, z_p)' := L\gamma,\ \ (w_1, \ldots, w_p)' := L\varphi,\ \ \Xi := L'\mathrm{diag}\left(\frac{z_1}{w_1}, \ldots, \frac{z_p}{w_p}\right)L$$

とおく．このとき，$\delta(\gamma, \theta)$ は，広義の事前分布

$$\pi(\theta) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(\theta - \mu)'(\Xi^{-1} - I)(\theta - \mu)\right\}$$

に関する一般化 Bayes 推定量となることが示される．ここで，$\Xi^{-1} - I$ は正定値ではないことに注意する．

定理 7 $\delta(\varphi, k)$ が許容的であるための必要十分条件は $k = -a\varphi'\varphi/2$ であることである．

証明　十分性については，定理 6 と同様の方法により示すことができる．必要性については，定理 3 の証明 (i) と同様にして，任意の $\theta \in \mathbb{R}^p$ に対して，

$$R(\theta, \delta(\varphi, k)) > R\left(\theta, \delta\left(\varphi, -\frac{a}{2}\varphi'\varphi\right)\right)$$

が成立することが示される． ■

3.2 共分散行列が一般の正値対称行列のとき

第 3.1 節では，共分散行列が単位行列のときに，線型推定量が許容性となるための必要十分条件を与えた．本節では，X を平均ベクトルが θ，共分散行列が一般の正値対称行列 Σ の p 変量正規分布に従う確率ベクトルとしたときの $\delta(\gamma, k)$ の許容性，非許容性について考える．

定理 8 X を p 変量正規分布 $N_p(\theta, \Sigma)$ に従う確率ベクトルとする．$\varphi'\theta$ の推定量 $\delta(\gamma, k)$ が許容的であるための必要十分条件は，次のいずれかの条件を満たすことである．

$$\text{(i)}\ \left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right)'\Sigma\left(\gamma - \frac{\varphi}{2}\right) \le \frac{1}{4}\varphi'\Sigma\varphi \quad \text{かつ} \quad \gamma \ne \varphi.$$

$$\text{(ii)}\ \gamma = \varphi \quad \text{かつ} \quad k = -\frac{a}{2}\varphi'\Sigma\varphi.$$

<u>証明</u>　Σ は正値対称行列であるので，$A\Sigma A' = I$ を満足する正則行列 A が存在する．$Z := AX$, $\omega := A\theta$ とすると，Z は正規分布 $N_p(\omega, I)$ に従うことが分かる．さらに，$\varphi^* := (A^{-1})'\varphi$, $\gamma^* := (A^{-1})'\gamma$ とおく．このとき $\gamma^* Z + k$ は $(\varphi^*)'\omega$ に対して許容的であるとき，またそのときに限り，$\gamma' X + k$ は $\varphi'\theta$ に対して許容的であることが示される．つまり，$\delta(\gamma, k)$ が $\varphi'\theta$ に対して許容的となるための必要十分条件は定理1〜5より，次のいずれかの条件を満たすことである．

$$\text{(i)}\ \left(\gamma^* - \frac{\varphi^*}{2}\right)'\left(\gamma^* - \frac{\varphi^*}{2}\right) \le \frac{1}{4}(\varphi^*)'\varphi^* \quad \text{かつ} \quad \gamma^* \ne \varphi^*.$$

$$\text{(ii)}\ \gamma^* = \varphi^* \quad \text{かつ} \quad k = -\frac{a}{2}(\varphi^*)'\varphi^*.$$

この条件を γ, φ で表わすことにより定理の証明を得る．■

4 おわりに

本論では，X が p 変量正規分布 $N_p(\theta, \Sigma)$ に従う確率ベクトルとしたときに，線型推定量が許容的となるための必要十分条件 (定理8) を与えた．定理8において $a \to 0$ とすることにより，定理1 (Cohen [2]) を得ることが分かる．また，定理8において $p = 1$, $\varphi = 1$, $\Sigma = 1$ とすることにより，定理2 (Rojo [4]) を得ることが分かる．つまり，補題3より，定理8は Cohen [2] 及び Rojo [4] の結果の一般化であることが分かる．

参考文献

[1] Anderson, T. W. *An introduction to multivariate statistical analysis.* Third edition. John Wiley & Sons, 2003.

[2] Cohen, A. Estimates of linear combinations of the parameters in the mean vector of a multivariate distribution. *Ann. Math. Statist.*, **36** (1965), 78–87.

[3] KARLIN, S. Admissibility for estimation with quadratic loss. *Ann. Math. Statist.*, **29** (1958), 406–436.

[4] ROJO, J. On the admissibility of $c\overline{X} + d$ with respect to the LINEX loss function. *Comm. Statist. Theory Methods*, **16** (1987), 3745–3748.

[5] TANAKA, H. LINEX 損失関数の下での一般化 Bayes 推定量の許容性について. 京都大学 数理解析研究所講究録, **1603** (2008), 142–153 .

[6] TANAKA, H. Sufficient conditions for the admissibility under LINEX loss function in regular case. Accepted for publication in *Comm. Statist. Theory Methods.*

[7] TANAKA, H. AND TATSUKAWA, M. On the admissibility of linear estimator in a multivariate normal distribution under LINEX loss. (In preparation).

[8] VARIAN, H. R. A Bayesian approach to real estate assessment. *Studies in Bayesian econometrics and statistics*, In honor of Leonard J. Savage. Eds. Fienberg, S. E. and Zellner, A. North-Holland Amsterdam (1975), 195–208.

[9] ZELLNER, A. Bayesian estimation and prediction using asymmetric loss functions. *J. Amer. Statist. Assoc.*, **81** (1986), 446–451.